Développement : Endomorphisme semi-simples.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agreg

Énoncé :

Soit $f \in L(E)$ un endomorphisme. Alors f est semi-simple si et seulement si le polynôme minimal de f est sans facteur carré.

On rappelle avant quelques notions :

Définition 1 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et soit $f \in L(E)$. On dit que f est semi-simple si tout sous-espace vectoriel stable par f admet un supplémentaire stable par f.

Lemme (des noyaux) 2 : Soit $P = P_1 ... P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que les polynômes P_i soient deux à deux premiers entre eux. Alors pour tout endomorphisme f de E, on a $ker(P(f)) = \bigoplus_{i=1}^{n} ker(P_i(f))$. En particulier si P annule f, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{n} ker(P_i(f))$ est les projecteurs associés sont dans $\mathbb{K}[f]$.

Résolution :

Lemme 3 : Soit F un sous-espace vectoriel stable par f, et soit $g = f_{|F}$. Si f est semi-simple, alors g est aussi semi-simple.

Démonstration : Soit G un sous-espace vectoriel de F stable par g. En particulier, G est un sous-espace vectoriel de E stable par f. Si f est semi-simple, il existe donc H un sous espace vectoriel de E, supplémentaire de G dans E, qui est stable par f. Ainsi, $H \cap F$ est un sous-espace vectoriel de F stable par g, supplémentaire de G dans F, ce qui prouve la semi-simplicité de g. $\square$

Lemme 4 : Soit $\mu_f = P_1^{\alpha_1} ... P_r^{\alpha_r}$ la décomposition en irréductible de μ_f dans $\mathbb{K}[X]$, et soit $E_i = ker(P_i^{\alpha_i}(f))$. Alors f est semi-simple si et seulement si $g_i = f_{|E_i}$ est semi-simple pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$.

Démonstration : Si f est semi-simple, alors comme E_i est stable par f, on a g_i qui est semi-simple pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$ d'après le lemme précédent.
Réciproquement, supposons que g_i soit semi-simple pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, on définit $F_i = F \cap E_i$. D'après le lemme des noyaux, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ et les projecteurs associés (π_i) sont dans $\mathbb{K}[f]$. En particulier, F est stable par π_i pour tout i et on

> En effet, comme π_i polynôme en f et que F est stable par f, on a que l'image de d'un élément x de F par π_i est une somme d'éléments de F car $f^k(x) \in F$ et donc on a bien que $\pi_i(x) \in F$.

a donc $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$. Or, pour tout i, F_i est stable par g_i donc il existe W_i un sous-espace vectoriel de E_i, supplémentaire de F_i dans E_i, stable par g_i. On pose alors $W = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i$ qui est stable par f (car W_i stable par $f_{|E_i} = g_i$) et qui est un supplémentaire de F dans E (car $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r = (F_1 \oplus W_1) \oplus ... \oplus (F_r \oplus W_r) = F_1 \oplus ... \oplus F_r \oplus W_1 \oplus ... \oplus W_r = F \oplus W$). On en déduit que f est semi-simple. $\square$

Il nous reste donc à vérifier que si $\mu_f = Q^\alpha$, alors $\alpha = 1$ est équivalent à f semi-simple. Cela prouvera que l'on a pas de facteur carré.

> En effet, l'application $f_{|E_i}$ a pour polynôme minimal $P_i^{\alpha_i}$. Il suffit donc de vérifier que chaque f tel que $\mu_f = Q^\alpha$ soit semi-simple ssi $\alpha = 1$.

Proposition 5 : Supposons que $\mu_f = Q^\alpha$ où Q est un irréductible de $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Alors f est semi-simple si et seulement si $\alpha = 1$.

Démonstration : Supposons que f est semi-simple : comme le sous-espace vectoriel $Ker(Q^{\alpha-1}(f))$ est stable par f, il existe G un sous-espace vectoriel de E, stable par f tel que $E = Ker(Q^{\alpha-1}(f)) \oplus G$. En particulier, G est aussi stable par $Q(f)$ (comme F par π_i), et on a $Q(f)(G) \subseteq Ker(Q^{\alpha-1}(f))$ car, pour tout $x \in G$, on a

$$Q^{\alpha-1}(f)(Q(f)(x)) = Q^\alpha(f)(x) = 0$$

Ainsi, on a $Q(f)(G) \subset G \cap Ker(Q^{\alpha-1}(f)) = 0$ car ces espaces sont en somme directe. En d'autres termes, on a donc prouvé que $G \subseteq Ker(Q(f))$. Or, comme $Ker(Q^i(f)) \subseteq Ker(Q^{i+1}(f))$ (car $Q^{i+1}(f)(x) = Q(f)(Q^i(f)(x)) = Q(f)(0) = 0$), on a donc $G \cap Ker(Q^i(f)) = G$ pour tout $i \geq 1$. Par minimalité de μ, on a $Q^{\alpha-1}(f) \neq 0$, d'où $G \neq \{0\}$ (de par la somme directe).
On a donc d'une part $G \cap Ker(Q^{\alpha-1}(f)) = \{0\}$ car ils sont en somme directe, et d'autre part $G \cap Ker(Q^i(f)) = G \neq 0$ pour tout $i \geq 1$, donc on a $\alpha - 1 = 0$ et donc $\alpha = 1$.

Supposons maintenant que $\mu_f = Q$ avec Q irréductible, et soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Si $F = E$, alors il suffit de prendre comme supplémentaire $G = \{0\}$ qui est bien stable par f. Sinon, on considère $x \notin F$ et on définit E_x le sous espace monogène engendré par x, c'est-à-dire

$$E_x = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}((f^p(x))_{p \in \mathbb{N}}) = \{P(f)(x) : P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Cet espace est stable par f, et on va montrer qu'il est en somme directe avec F : soit $y \in F \cap E_x$, et soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)(x)$. Comme μ_f est irréductible, on a $\mathbb{K}[f] \cong \mathbb{K}[X]/\mu_f\mathbb{K}[X]$ qui est un corps. Si $P(f) \neq 0$, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $R(f) \circ P(f) = Id$ et donc $R(f)(P(f)(x)) = x$. Or, comme F est stable par f et que $y \in F$, alors $R(f)(y) \in F$, d'où $x \in F$ ce qui est absurde. On a donc $P(f) = 0$, d'où $y = 0$ et F et E_x sont bien en somme directe.
Pour conclure, il suffit de construire de manière itérative une séquence d'éléments $x_1, ..., x_p$ tels que pour tout $i, x_i \notin F \bigcup_{j<i} E_{x_j}$, qui sera nécessairement finie car E est de dimension finie. D'après ce qui précède, on aura E_{x_i} en somme directe avec $F \bigcup_{j<i} E_{x_j}$, ce qui prouve que $E = F \bigoplus_{i=1}^p E_{x_i}$. On pose alors $G = \bigoplus_{i=1}^p E_{x_i}$ qui est stable par f et qui est un supplémentaire de F dans E, ce qui prouve la semi-simplicité de f.